Breve corso di Teoria dei Giochi

Roberto Lucchetti

Politecnico di Milano

Topics

- Ipotesi di egoismo e razionalità
- Il gioco in forma estesa
- Induzione a ritroso
- Diversi tipi di soluzione
- Posizioni P e N in giochi combinatorici
- Strategie

Ipotesi 1

La prima ipotesi di base della teoria è la seguente:

> Ogni agente è interessato esclusivamente ai propri obiettivi

Ipotesi di tipo matematico, non etico: scopo di ogni giocatore è cercare di ottenere la massima soddisfazione personale possibile.

Razionalità

Il giocatore si comporta razionalmente.

1. I giocatori sanno esprimere preferenze sugli esiti del gioco;
2. I giocatori sanno determinare una funzione di utilità che rappresenti le loro preferenze, in caso sia necessario;
3. Se nel gioco sono presenti eventi probabilistici, i giocatori calcolano le loro utilità attese seguendo le leggi del calcolo della probabilità;
4. I giocatori sanno analizzare le conseguenze delle loro azioni e di quelle degli altri, e le conseguenze delle conseguenze...;
5. I giocatori usano la teoria delle decisioni quando possibile.

Commenti 1

I giocatori sanno esprimere preferenze sugli esiti del gioco: Ordinare in maniera coerente gli esiti del gioco (proprietà transitiva cruciale)

I giocatori sanno determinare una funzione di utilità che rappresenti le loro preferenze, in caso sia necessario: u è una funzione di utilità per $\succcurlyeq$ se $a \succcurlyeq b \Leftrightarrow u(a) \geq u(b)$.

Se nel gioco sono presenti eventi probabilistici, i giocatori calcolano le loro utilità attese seguendo le leggi del calcolo della probabilità: Esempio se un evento ha probabilità $\frac{1}{3}$ e utilità 2, mentre un altro ha utilità $\frac{2}{3}$ con utilità 5, per il giocatore la situazione è identica alla situazione in cui con certezza la sua utilità è $\frac{1}{3} \times 2 + \frac{2}{3} \times 5 = \frac{12}{3}$.

Commenti 2

I giocatori sanno analizzare le conseguenze delle loro azioni e di quelle degli altri, e le conseguenze delle conseguenze . . . : Considerate il gioco seguente: ognuno di voi scrive un numero tra 1 e 100 su un foglietto, io li raccolgo e calcolo la media M. Vince un premio chi più si avvicina al numero $\frac{1}{2}$M. Che cosa scrive un esperto di teoria dei giochi?

I giocatori usano la teoria delle decisioni quando possibile: la teoria deve essere una generalizzazione della situazione di quando si è soli a decidere. L'esito definito razionale per un gioco a n giocatori deve essere lo stesso che prevede la teoria delle decisioni quando $n = 1$.

La forma estesa del gioco

Esistono modi diversi di rappresentare un gioco. Uno di questi è la cosiddetta forma estesa, che consiste nel formalizzare tutte le regole del gioco. Un'altra forma, che vedremo dopo, consiste nel darne una rappresentazione più compatta.

Chiariamo il concetto con un esempio.

Un esempio

Esempio

Tre fratelli sono a casa dei nonni in vacanza, quando ricevono un invito per andare fuori a cena con degli amici; ognuno di loro vuole andare ma non vuole dirlo esplicitamente ai nonni che hanno preparato la cena. La decisione se accettare l'invito viene presa a maggioranza e i tre fratelli votano pubblicamente, davanti ai nonni, uno dopo l'altro.

Le loro preferenze, identiche, in ordine decrescente:

1. *non accettare l'invito (no) ma andare: è la situazione ideale;*
2. *accettare l'invito (sì) e andare;*
3. *non accettare l'invito (no) e non andare;*
4. *accettare l'invito (sì) e non andare.*

L'albero del gioco

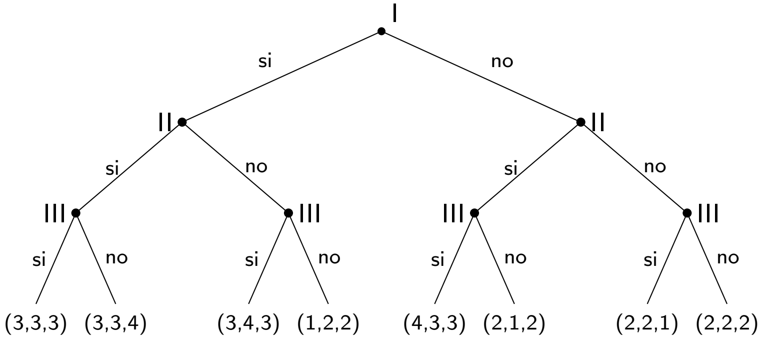


Figure: L'albero del gioco dei tre fratelli.

I numeri scelti per rappresentare le preferenze dei tre ragazzi sono arbitrari, quel che conta è il loro ordine.

L'albero descrive ogni possibile evoluzione del gioco.

Un secondo esempio

Esempio

Questo gioco si chiama il gioco della roulette russa.

1. *Situazione iniziale: due giocatori con una pistola a sei colpi ciascuno. In ogni pistola c'è un solo proiettile;*
2. *Regole:*
    - *I giocatori mettono un euro sul piatto per aver il diritto di giocare;*
    - *Il giocatore 1 decide di giocare o ritirarsi, se si ritira aggiunge 2 Euro al piatto;*
    - *Nel caso il giocatore 1 sopravviva al primo stadio, il giocatore due ha le stesse opzioni;*
3. *Esiti: Se entrambi sono vivi, si dividono il piatto, se uno è morto l'altro si tiene tutto il piatto.*

L'albero della roulette russa

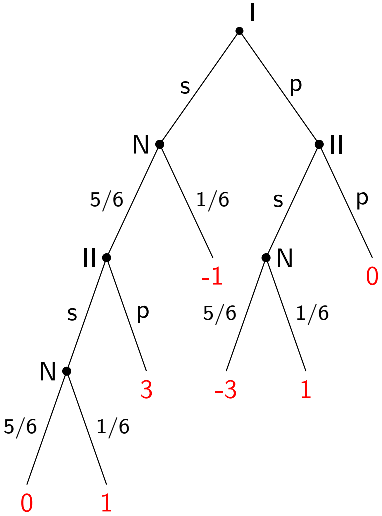


Figure: L'albero del gioco della roulette russa.

Caratteristiche del gioco

I due giochi precedenti hanno le proprietà:

- I giocatori giocano in sequenza;
- Tutto lo svolgimento del gioco è noto a tutti i giocatori, che hanno le stesse identiche informazioni.

  Questi giochi si chiamano Giochi (finiti) a informazione perfetta.

Come analizzare questi giochi?

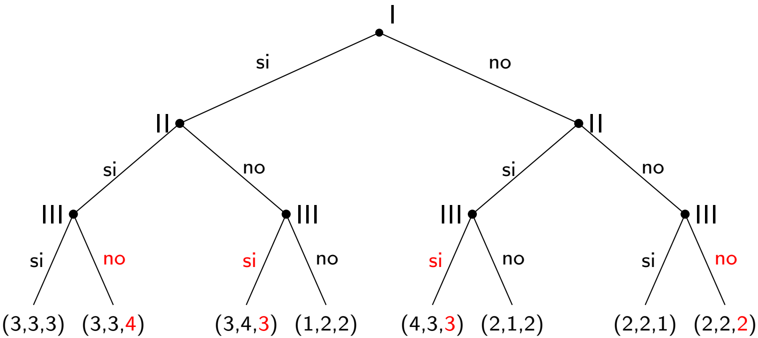


Figure: L'albero del gioco dei tre fratelli

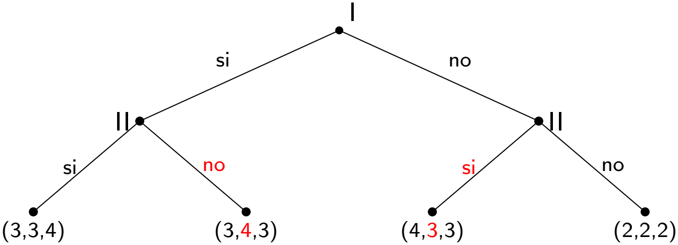


Figure: L'albero ridotto del gioco dei tre fratelli

Conclusione dell'Esempio dei tre fratelli

1. l'esito del gioco è che i ragazzi andranno a cena con gli amici;
2. Il primo vota per stare coi nonni, ottenendo così utilità massima;
3. Il secondo vota no se il primo vota sì, vota sì se il primo vota no;
4. Il terzo vota no se sono stati votati prima due sì o due no, vota sì altrimenti.

Lo svolgimento del gioco dunque è il seguente: il primo vota no, gli altri votano sì, i nonni restano soli a cena.

Induzione a ritroso

Generalizzando, in ogni gioco a informazione perfetta, descritto dal suo albero, questo metodo, chiamato Induzione a ritroso, fornisce:

1. Il comportamento dei giocatori in ogni situazione in cui potrebbero essere chiamati a prendere una decisione;
2. Il risultato finale, o esito del gioco.

Il metodo dell'induzione a ritroso

Su cosa si basa il metodo di induzione a ritroso? Chiamiamo lunghezza del gioco il numero di mosse necessarie a terminare la partita più lunga possibile. L'informazione perfetta implica che ogni vertice dell'albero rappresenta l'inizio di un nuovo gioco, sottogioco di quello inziale, e di lunghezza minore. Inoltre:

- I giochi di lunghezza 1 hanno una soluzione ben definita, dalla teoria delle decisioni, in quanto c'è un solo giocatore che decide, che quindi sceglie l'esito da lui preferito;
- Avendo la soluzione dei giochi di lunghezza minore di un numero qualsiasi n, sappiamo risolvere quelli di lunghezza n, perché la soluzioni di quelli di lunghezza minore di n è nota a tutti i giocatori, questo vale per $n = 2, 3, \ldots$.

Quando si riesce davvero applicare l'induzione a ritroso?

Per applicare l'induzione a ritroso abbiamo bisogno di avere l'albero del gioco. Per quali giochi l'albero è ragionevolmente disponibile ?

Solo per giochi semplici, e la cui lunghezza è molto piccola. Diventa allora naturale distinguere tra tre tipologie di giochi:

- quelli cui l'induzione si applica, ma non è possibile dire nulla di più;
- quelli in cui si può dire quel che succede, per esempio chi vince, basandosi su un ragionamento logico, ma non si sa dire che cosa devono fare i giocatori per arrivare alla soluzione (per esempio come un certo giocatore riesce a vincere);
- quelli in cui è possibile dire quali sono le azioni determinate dall'induzione a ritroso.

Gli scacchi

Il più famoso del primo tipo è il gioco degli scacchi: sappiamo dire che *ogni partita* giocata dai giocatori razionali della teoria finisce sempre con lo stesso esito, ma non sappiamo dire se questo esito è la vittoria del bianco, la vittoria del nero, o il pareggio.

Figure: Paul Klee, Great Chess game, 1937. Kunsthaus, Zurich.

Le alternative degli scacchi

Negli scacchi vale una e una sola delle seguenti alternative:

- Esiste un modo per il bianco che le permette di vincere, qualunque cosa faccia il nero;
- Esiste un modo per il nero che le permette di vincere, qualunque cosa faccia il bianco;
- Esiste un modo per il bianco che le permette di ottenere almeno il pareggio, qualunque cosa faccia il nero, e viceversa.

Un esempio del secondo tipo

Due giocatori hanno una tavoletta di cioccolato davanti. Giocano alternati, al proprio turno uno dei giocatori sceglie un quadratino di cioccolato, e prende quello e tutti quelli che si trovano sopra e a destra. L'ultimo però è avvelenato, quindi chi è costretto a prenderlo perde la partita. Vediamone un esempio:

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21
22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35

Supponiamo il primo giocatore scelga il quadratino contrassegnato dal 20. Allora si prende il 6, 13, 20, 7, 14, 21. Supponiamo che alla mossa successiva il secondo decida di prendere il quadratino 23, allora lascia sul tavolo 1,8,15,22,29,30,...,34,35.

Vince il primo giocatore!

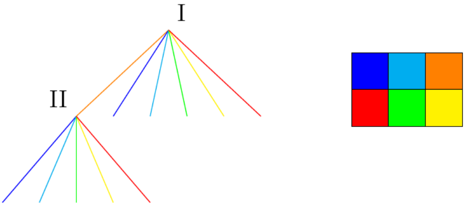


Figure: Gli archi hanno il colore del rettangolo scelto.

Supponiamo il primo scelga il ramo più a sinistra. Le alternative sono allora due. Nel sottoalbero a sinistra vince il secondo, oppure vince il primo. Se vince il primo, allora il primo ha trovato la mossa iniziale vincente: sceglie il ramo di sinistra. Se vince il secondo, allora esiste un ramo tra quelli che si dipartono da quel vertice, che gli permette di andare in un sottogioco dove vince. Ma allora il primo giocatore, all'inizio, potrebbe prendere quel ramo, assicurandosi così la vittoria: vince il primo in ogni caso!

Il gioco del Nim

- Sul tavolo ci sono un certo numero di carte, suddivise in un certo numero di mucchietti;
- Due giocatori giocano alternandosi: ognuno prende quante carte vuole da un mucchietto di sua scelta;
- Chi lascia il tavolo senza carte vince.

Esempio. Ci sono tre mucchetti, uno con 5 carte, uno con 7 il terzo con 2: $(5, 7, 2)$. Il primo giocatore prende 4 carte, lasciando $(1, 7, 2)$. Il secondo lascia $(1, 1, 2)$. Il primo $(1, 1, 0)$. Così vince il primo.

Nel gioco del Nim si vuole stabilire una regola che dica chi vince, qualunque sia il numero di carte e qualunque sia il numero di mucchietti in cui sono suddivise.

Posizioni **P** e **N**

Un gioco Nim quindi può essere descritto da un vettore $(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ con n_i interi non negativi, che viene chiamato posizione: ad esempio $(3, 2, 2, 5)$ descrive la situazione in cui abbiamo una mucchietto di 3 fiammiferi, due di 2, e una di 5. Un modo efficace di trovare l'esito di questi giochi consiste nel dividere tutti i vettori in due sottoinsiemi distinti:

- il sottoinsieme delle posizioni **P**;
- il sottoinsieme delle posizioni **N**.

Il criterio per stabilire in quale delle due categorie deve essere messa una posizione è il seguente:

- $(0, 0, \ldots, 0)$ è una **P** posizione;
- le posizioni che, per le regole del gioco portano ad *almeno* una **P**-posizione sono **N**-posizioni;
- le posizioni che portano *esclusivamente* a **N**-posizioni sono **P**-posizioni.

Chi vince

Dalla definizione di **N** e **P** posizione se gue subito che se un giocatore si trova in posizione **N** può fare in modo che il gioco si sviluppi:

$$\mathbf{N} \quad \mathbf{P} \quad \mathbf{N} \quad \mathbf{P} \quad \ldots \quad \mathbf{P}$$

ma siccome il gioco è finito l'ultima posizione **P** corrisponde a $(0, 0, \ldots, 0)$, cioè alla fine del gioco.

Quindi il giocatore che si trova a dover giocare in una posizione **N** può fare in modo da essere sempre in una posizione **N** quando tira, con l'avversario sempre in una posizione **P**.

Ne segue dunque che se la posizione iniziale è una posizione **N**, il primo ha una strategia vincente.

Esempi

Esempio 1. (k, n) In questo caso la posizione è **P** se e solo se $k = n$. Ecco la strategia vincente del secondo giocatore nel caso (n, n). Il primo lascia una situazione del tipo (l, n) con $l < n$. Allora il secondo sceglie di lasciare la posizione (l, l). Ora il primo deve lasciare una situazione (m, l) con $m < l$, e il secondo lascia (m, m). E così via fino a quando il secondo lascia la posizione $(0, 0)$, il primo non ha più mosse, il secondo ha vinto.

Esempio 2. $(1, 2, 3)$ è una **P**-posizione: le mosse possibili per il primo giocatore sono:

1. lasciare un mucchietto senza carte: $\{(0, 2, 3), (1, 0, 3), (1, 2, 0)\}$. Queste sono **N**-posizioni;
2. due mucchietti con lo stesso numero di fiammiferi: $\{(1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 2, 1)\}$, che sono, anche queste, **N**-posizioni.

Come determinare le posizioni in generale

Esiste un teorema che spiega come determinare le posizioni del Nim.

Definiamo l'operazione $n \oplus m$ come segue:

1. si scrivono n, m in base binaria: $n = (n_k \dots n_0)_2$, $m = (m_k \dots m_0)_2$;
2. si forma il numero binario $(n_k + m_k)_2 \dots (n_0 + m_0)_2$;
3. si definisce $n \oplus m = z$, con $(z)_2 = (n_k + m_k)_2 \dots (n_0 + m_0)_2$.

Esempi

Ecco qualche calcolo con $\oplus$

1. $2 \oplus 4 = 6$: $(2)_2 = 10$, $(4)_2 = 100$, $10 +_2 100 = 110$ and $6 = (110)_2$
2. $2 \oplus 3 = 1$. $(2)_2 = 10$, $(3)_2 = 11$, $10 \oplus 11 = 01 = 1$, $(1)_2 = 1$
3. $3 \oplus 3 = 0$, in generale $n \oplus n = 0$.

Il teorema di Bouton

Una posizione $(n_1, n_2, \ldots, n_N)$ è una **P**-posizione se e solo se

$$n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_N = 0.$$

Un esempio

Consideriamo la posizione $(1, 5, 7)$.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & = & 001_2 & \oplus \\ 5 & = & 101_2 & \oplus \\ 7 & = & 111_2 & = \\ \hline 3 & = & 011 & \end{array}$$

Per passare alla **P**-posizione

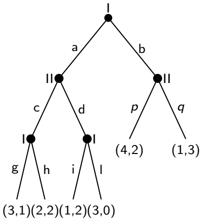
$$\begin{array}{ccc} 1 & = & 001 \oplus \\ 5 & = & 101 \oplus \\ 4 & = & 100 = \\ \hline 0 & = & 000 \end{array}$$

Verso la forma strategica

Per applicare il metodo di induzione a ritroso, è necessario specificare le scelte fatte dai giocatori in ogni nodo del gioco. Ogni giocatore deve decidere che cosa fare in ogni nodo etichettato col suo nome. Questa motiva la definizione.

Dato un gioco a informazione perfetta descritto da un albero, si chiama strategia per il giocatore i la specificazione di un azione da prendere in ogni nodo etichettato col nome di i, si chiama profilo di strategie la specificazione di una strategia per ogni giocatore.

Esempio



Forma strategica:

	cp	cq	dp	dq
agi	(3, 1)	(3, 1)	(3, 1)	(3, 1)
agl	(3, 1)	(3, 1)	(3, 0)	(3, 0)
ahi	(2, 2)	(2, 2)	(3, 1)	(3, 1)
ahl	(2, 2)	(2, 2)	(3, 0)	(3, 0)
bgi	(4, 2)	(1, 3)	(4, 2)	(1, 3)
bgl	(4, 2)	(1, 3)	(4, 2)	(1, 3)
bhi	(4, 2)	(1, 3)	(4, 2)	(1, 3)
bhl	(4, 2)	(1, 3)	(4, 2)	(1, 3)