Il passaggio dal *medioevo* all'*era moderna* in Geometria algebrica può forse collocarsi intorno alla metà del secolo scorso, in relazione alle ricerche profondamente innovatrici di B. Riemann.
Nella teoria di Riemann, esposta in un fondamentale lavoro del 1859, gioca un ruolo fondamentale l'invariante, da lui chiamato *Klassenzahl*, oggi detto *genere* (*Geschlecht*) secondo la terminologia introdotta successivamente da R. F. A. Clebsch. Il genere è un invariante topologico, essendo precisamente il *numero di manici* che la curva complessa, vista come superficie orientabile e compatta, possiede. Riemann dimostra che questo invariante topologico coincide con l'invariante analitico, già introdotto da N. H. Abel, dato dalla dimensione dello spazio vettoriale degli integrali abeliani ovunque regolari (o *differenziali olomorfi*, secondo la moderna terminologia) sulla curva. Inoltre egli prova che il genere g entra nella determinazione del massimo numero r di funzioni razionali linearmente indipendenti con dati poli sulla curva. Riemann dimostra infatti che, se i poli sono n, allora $r \geq n - g + 1$, un teorema completato da G. Roch nel 1864 con l'interpretazione della differenza $r-n+g-1$ come il massimo numero dei differenziali olomorfi linearmente indipendenti, nulli nei dati poli (*teorema di Riemann-Roch*). Riemann introduce il concetto di *trasformazione birazionale* tra curve (cioè di trasformazione, generalmente invertibile, definita da funzioni razionali) e suddivide le curve di genere g, date a meno di trasformazioni birazionali, in classi, dipendenti da un certo numero m di parametri o *moduli*, che egli valuta in $m=0$ se $g=0$, $m=1$ se $g=1$ e $m=3g-3$ se $g \geq 2$. Il punto di vista di Riemann è soprattutto analitico, basato sulla teoria delle funzioni di variabile complessa, che egli contribuisce a riformulare ed estendere.
Dopo Riemann, particolarmente Clebsch e P. A. Gordan (1866) sviluppano in Germania applicazioni e interpretazioni geometriche della sua teoria.
L'esito naturale di queste interpretazioni geometriche è lo sviluppo di un approccio algebrico-geometrico, con la relativa formulazione di un apposito linguaggio, alla teoria di Riemann. Questo complesso e ambizioso programma viene intrapreso negli anni '70 del XIX secolo da M. Noether e A. Brill, le cui idee possono considerarsi come l'inizio dell'uso sistematico in geometria delle nuove tecniche algebriche, in particolare di quella che oggi chiamiamo algebra commutativa.
Tuttavia è nella fondamentale memoria *Ueber die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der geometrie* pubblicata nei *Mathematische Annalen* nel 1873, che Brill e Noether realizzano il loro capolavoro concettuale, traducendo la teoria analitica di Riemann nel rivoluzionario linguaggio geometrico-proiettivo delle *serie lineari* su una curva algebrica. Una serie lineare è una serie di "gruppi di punti" (oggi detti *divisori*) tagliati sulla curva, pensata immersa in uno spazio proiettivo, dalle ipersuperficie di un sistema lineare, fuori da eventuali punti base sulla curva.
Una pietra miliare della teoria è l'individuazione dello stretto legame tra questo concetto, le applicazioni razionali della curva in spazi proiettivi, e l'esistenza di funzioni razionali con dati poli sulla curva.
Riferendosi ad opportuni modelli piani delle curve, Brill e Noether provano in modo molto semplice e rigoroso, per via algebrico-geometrica, il teorema di Riemann-Roch, che dal nuovo punto di vista è un'asserzione sulla dimensione delle serie lineari.
Allo stesso periodo risalgono i fondamentali contributi di Clebsch e Noether alla fondazione della teoria delle superficie. Una teoria che aveva visto negli anni immediatamente precedenti i suoi primi sviluppi con gli studi di L. Cremona e dello stesso Clebsch relativi alle *superficie razionali* (cioè quelle birazionali al piano) dei gradi più bassi in uno spazio proiettivo. La teoria trascendente di Riemann non si prestava, per mancanza di tecniche adeguate, a una facile generalizzazione dallo studio delle curve a quello di varietà di dimensione superiore. Infatti l'estensione del punto di vista analitico-trascendente alle superficie fu realizzato ben più tardi, tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX, dalla scuola francese soprattutto con H. Poincaré ed E. Picard, mentre l'ulteriore estensione alle varietà di dimensione superiore è ancora più recente (anni '20-'30 di questo secolo), in gran parte dovuto alla scuola anglo-americana con S. Lefschetz e W. V. D. Hodge. Per contro, l'approccio algebrico-geometrico alla teoria delle curve suggeriva alcune naturali generalizzazioni.
Nello studio di questi problemi fu

incontrato un fenomeno sorprendente che per primo mise in risalto una profonda differenza tra la teoria delle curve e quella delle superficie. Proprio in quegli anni infatti A. Cayley (1871) aveva dato delle formule per il calcolo di quel che oggi si chiama il *polinomio di Hilbert* di una curva dello spazio. Tale polinomio computa la dimensione dello spazio vettoriale dei polinomi omogenei di grado n che si annullano sulla curva, per n molto grande. Noether e Cayley notarono che, nel caso delle *superficie rigate* (ossia descritte da una famiglia unidimensionale di rette) di grado d con singolarità ordinarie e con curve sezioni piane di genere g, calcolando tale polinomio per la curva dei punti doppi e per $n=d-4$, ne risultava il valore non positivo $-g$, mentre è facile vedere che le rigate hanno genere 0. Noether fu dunque indotto a introdurre, accanto al genere p, detto *genere geometrico* e denotato con il simbolo p_g, il *genere aritmetico* o *numerico* p_a di una superficie, risultante dal suddetto calcolo, che si dimostra essere anch'esso un invariante birazionale e che è sempre non maggiore di p_g.
La quantità $q=p_g-p_a$ venne denominata *irregolarità* della superficie. A Noether (1875) si deve la congettura che fosse sempre $q=0$, tranne che per le rigate: una congettura dimostratasi poi ben lontana dal vero, e che testimonia dell'incertezza di questi primi passi della teoria delle superficie. Successive ricerche di Noether (1886) sono dedicate a generalizzare la nozione di serie lineare su una curva pervenendo al concetto di *sistema lineare* di curve su una superficie, e a tentare l'estensione del teorema di Riemann-Roch alle superficie col calcolo della dimensione di tali sistemi: si tratta di ricerche in cui vengono posti, più che risolti, i problemi che la nuova teoria delle superficie incontra ai suoi inizi.
Noether non si limitò all'introduzione degli invarianti birazionali, ma affrontò anche lo studio di alcune notevoli classi particolari di superfici algebriche. In particolare si occupò, sulla scia di Cremona e Clebsch, di superficie razionali. Il suo punto di vista è però completamente innovativo rispetto ai predecessori. Egli infatti non si addentra più nel ginepraio degli infiniti casi particolari e delle classificazioni minute. Bensì egli utilizza la gran mole di esempi forniti dai geometri che lo avevano preceduto, per cercare di dedurne risultati generali. È in questo ordine di idee che vanno collocati i suoi importanti *criteri di razionalità*.
Va infine menzionato il tentativo del 1888, non coronato da successo ma ugualmente importante dal punto di vista storico e metodologico, di provare che ogni superficie può essere trasformata birazionalmente in una superficie con singolarità ordinarie dello spazio tridimensionale. Il teorema, sostanzialmente equivalente a quello che asserisce l'esistenza di un modello birazionale liscio, fu dimostrato rigorosamente solo molto più tardi (da M. Walker nel 1935 e O. Zariski nel 1939).
L'opera di assimilazione e di sviluppo dei metodi di Riemann e della scuola tedesca costituì l'elemento trainante della straordinaria fioritura della scuola di Geometria algebrica italiana nella seconda metà, e in particolare nell'ultimo quarto, del secolo scorso. A partire dal grande caposcuola Cremona, profondo conoscitore dell'opera di Riemann, che diffuse nel suo appassionato insegnamento universitario.
In verità, a partire dalla fine degli anni '80 del XIX secolo l'attività di Noether e della sua scuola si affievolisce. L'eredità dei geometri tedeschi viene raccolta dalla scuola italiana, che si svilupperà nel successivo ventennio accentuando sempre più un suo approccio marcatamente geometrico e intuitivo. Tra le principali figure di questo periodo va indicato, accanto a G. Veronese ed E. Bertini, il giovane Corrado Segre, allievo di E. D'Ovidio a Torino. A Veronese si deve una profonda rielaborazione dei fondamenti della geometria proiettiva di uno spazio a un numero qualunque di dimensioni e una loro esposizione (1882) in modo rigoroso e sistematico. Agli ultimi due è dovuto, tra l'altro, in quegli anni il perfezionamento e la diffusione dell'approccio di Brill e Noether alla teoria delle curve con il metodo proiettivo iperspaziale. Nel 1894, con due lavori distinti ma scritti in stretta connessione e apparsi nello stesso numero degli *Annali di Matematica*, C. Segre e Bertini, profittando appieno del linguaggio proiettivo messo a punto da Veronese, davano sistemazione definitiva, armoniosa e organica alla teoria delle curve.

a.b. - c.c.