1 – Quanti 17 per Lavinia!

5843779853861278142872476575

Lavinia ottiene la somma 17 esattamente **8** volte.

2 – Una suddivisione intelligente

5	4	4	4
5	1	2	4
5	5	2	3
1	5	3	3

La suddivisione è riportata in figura.

3 – Un’addizione in maschera

Se ∗ = x, ◆ = y, ○ = z, allora:

$3(10x+y)+3(10y+x) = 10z+z$

$33x+33y = 11z$

$3x+3y = z$

Ma siccome x e y sono diversi e non nulli,
può solo essere $x = 1$ e $y = 2$ oppure $x = 2$ e $y = 1$,

per cui $z = 9$.

Il numero rappresentato da ○○ è **99**.

4 – Deve risultare vera

Nel riquadro si contano
x numeri, y pari, z dispari.

Ovviamente x = 3, che è dispari.

Inoltre y+z = 3, devono essere un pari e un dispari.

Quindi c'è un solo pari e due dispari: y = 1, z = 2.

In questo riquadro si contano
3 numeri
1 numero pari
2 numeri dispari!

5 – È tempo di messaggi

Ordiniamo gli orari:

10:54 12:11 13:28 16:02 17:19 18:36

1:17   1:17   2:34   1:17   1:17

Calcoliamo gli intervalli di tempo:

Tra il messaggio delle 13:28 e quello delle 16:02 è passato un tempo doppio: in questo intervallo manca un messaggio.

Il messaggio mancante è stato inviato 1:17 dopo le 13:28, cioè alle 14:45.

L'ora mancante è **14:45**.

6 – Il numero di Carla

Siano a, b, c le tre cifre, nell'ordine, del numero di Carla.

Se la cifra c delle unità non fosse 9, aggiungendo 1 la somma delle cifre aumenterebbe di 1.

Quindi $c = 9$; inoltre b deve essere minore di 9.

Aggiungendo 1, si ottiene un numero le cui cifre sono a, b+1, 0.

Si ha: $a+b+9 = 3(a+(b+1))$

da cui segue $a+b = 3$, quindi $a = 1$ e $b = 2$.

Il numero scritto inizialmente da Carla è **129**.

7 – Il cubo di Milena

Gli 8 cubetti d’angolo mostrano solo 3 facce

e dunque possono essere ruotati in modo da nascondere le 3 facce blu e mostrare 3 facce bianche.

A maggior ragione, anche i 12 cubetti di spigolo possono essere ruotati in modo che mostrino 2 delle 4 facce bianche.

Ancora piú facilmente, i 6 cubetti al centro delle facce possono essere ruotati in modo che mostrino una faccia bianca.

Sul nuovo cubo si vedono **0** facce blu.

8 – Alla fine viene fuori un dolce

Siccome E = 9, allora necessariamente O = 3.

Inoltre T deve essere almeno 4.

Provando a calcolare il triplo di T3T3,
con T = 4, 5, 6, 7, 8, 9,

si vede che solo con T = 4 si ottiene un numero in cui la cifra delle migliaia, cioè O, vale 3, cioè 13029.

TOTO vale **4343**.

9 – Una progressione aritmetica

I primi n termini della progressione sono:
a, a+d, a+2d, ... a+(n-1)d .

Quindi la loro somma si può scrivere come
$na+d(1+2+...+(n-1)) = na+dn(n-1)/2 = n(a-d/2+dn/2)$.

Però deve anche essere $n(3n+1)$: uguagliando e dividendo per n

si ha $dn/2+(a-d/2) = 3n+1$.

Per il principio di identità dei polinomi

si ricava che $d = 6$, e di conseguenza $a = 4$.

Il primo termine a_1 è **4** e la ragione *d* è **6**.

9 – Una progressione aritmetica

Oppure: il primo termine è uguale alla somma
di 1 termine, pongo n = 1 e trovo che n(3n+1) = 4.

Il secondo termine è 4+d, quindi la somma dei primi
due termini è 4+(4+d)

però posso trovarla ponendo n = 2 e trovo che vale 14,

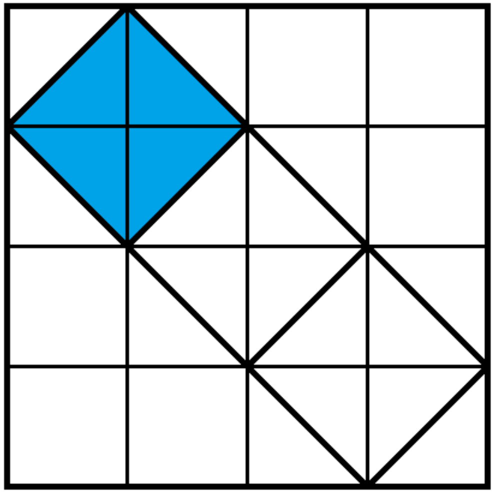
quindi d = 6.

Poi verifico se funziona con n = 3, 4, 5,....

e sono "abbastanza sicuro" di aver fatto bene.

Il primo termine a_1 è **4** e la ragione *d* è **6**.

10 – Tre quadrati insieme ...



Eventualmente aiutandosi con una quadrettatura ...

si vede che ogni quadrato piccolo è $4/32 = 1/8$ del quadrato grande.

Quindi l'area è 8×17 cm^2.

L'area del quadrato grande misura **136** cm^2.

11 – Il piú grande dei cinque

Indichiamo con $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$ i cinque numeri.

Si può quindi scrivere l'equazione

$(x-2)^2+(x-1)^2+x^2 = (x+1)^2+(x+2)^2$

che, semplificata, porta a $x^2-12x = 0$.

Siccome x non può essere 0, allora $x = 12$.

Quindi i cinque numeri sono 10, 11, 12, 13, 14.

In effetti $10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2 = 365$.

Il piú grande dei cinque numeri è **14**.

12 – I tre numeri

Possiamo scrivere: $a(b+c) = 20$, $b(a+c) = 18$, $c(a+b) = 14$.

Sommando membro a membro e dividendo per 2 si ha $ab+ac+bc = 26$.

Sottraendo le tre equazioni (una alla volta) da questa, si ottiene $bc = 6$, $ac = 8$, $ab = 12$.

Moltiplicando queste ultime tre equazioni e estraendo la radice quadrata si ottiene $abc = 24$.

Dividendo quest’ultima equazione per le tre precedenti si ottiene $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$.

La somma dei tre numeri è $4+3+2 =$ **9**.

13 – Adesso i numeri sono due

Possiamo scrivere $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ e $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}$,

da cui ricaviamo $3y - 3x = xy$ e $4y^2 - 4x^2 = x^2y^2$.

Confrontando si ottiene $4(y + x)(y - x) = 9(y - x)^2$

ma siccome x e y devono essere diversi, allora

$4(y + x) = 9(y - x)$, per cui $y = \frac{13}{5}x$.

Sostituendo si ricava $13x^2 - 24x = 0$, ma x non
può essere 0, quindi è $x = \frac{24}{13}$ e allora $y = \frac{24}{5}$.

Il prodotto vale $\frac{24}{5} \times \frac{13}{24}$ = **13/5**.

14 – Numeri dispettosi

Siano a, b, c le tre cifre del numero, che vale $100a+10b+c$.

Abbiamo che $100b+10a+c = 100a+10b+c+270$

e anche $100a+10c+b = 100a+10b+c-63$.

Da cui: $90b = 90a+270$ e $9c = 9b-63$

e quindi: $b = a+3$ e $c = b-7$.

In effetti b può essere solo 7, 8, 9, e quindi

i numeri dispettosi sono 470, 581, 692.

Il numero dispettoso piú grande è **692**.

15 – Il triangolo rettangolo

Se i cateti misurano a, b, e l'ipotenusa c, allora abbiamo:

$a+b+c = 208$, $a+b = c+30$, $a^2+b^2 = c^2$.

Dalle prime due ricavo $c+30+c = 208$, cioè $c = 89$.

Quindi $a+b = 119$. Da $a+b = c+30$ ricavo

$a^2+2ab+b^2 = c^2+60c+900$, quindi $2ab = 6240$, $ab = 3120$.

Conoscendo somma e prodotto di a e b scrivo l'equazione

$x^2-119x+3120 = 0$ che, risolta, dà 39 e 80.

Il cateto piú piccolo misura **39** cm.

16 – Un campo difficile

Chiamiamo a, b, c i tre lati, c quello opposto all'angolo di 120° è il maggiore di tutti.

Inoltre a e b non possono essere uguali.

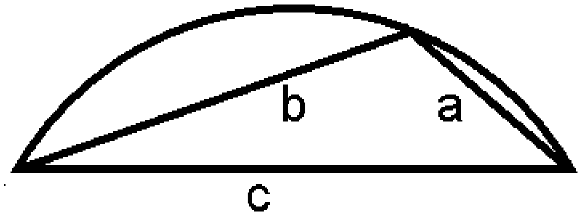
Dal teorema del coseno, oppure con Pitagora, si ricava che

$a^2+ab+b^2 = c^2$.

Dal momento che c non supera 19, si può procedere a tentativi.

Non può essere a = 1, quindi provo varie coppie di valori a e b, con $1<a<b$, vedendo se a^2+ab+b^2 è un quadrato perfetto $\leq 19^2$ (devo provare "solo" 77 coppie!).

16 – Un campo difficile



Cerchiamo un metodo piú furbo...

Dal disegno si intuisce che a+b e c differiscono "poco".

Anche con $c = 20$, si ha $a+b < 40/\sqrt{3} < 24$.

Pertanto $t = a+b-c$ può essere solo 1, 2, 3.

Sostituendo $c = a+b-t$ nell'equazione $a^2+ab+b^2 = c^2$ ottengo

$ab-2at-2bt+t^2 = 0$. L'aspetto "è incoraggiante"...

ma per fattorizzare aggiungo $3t^2$ ai due membri.

$(a-2t)(b-2t) = 3t^2$.

16 – Un campo difficile

Ponendo $t = 1$ ottengo $(a-2)(b-2) = 3 = 1\times3$.

Quindi $a = 3$, $b = 5$, $c = 3+5-1 = 7$.

Ponendo $t = 2$ ottengo $(a-4)(b-4) = 12 = 1\times12 = 2\times6 = 3\times4$.

Quindi $a = 5$, $b = 16$, $c = 19$; $a = 6$, $b = 10$, $c = 14$;
$a = 7$, $b = 8$, $c = 13$.

Ponendo $t = 3$ ottengo $(a-6)(b-6) = 27 = 1\times27 = 3\times9$.

Ma in questi casi c risulta maggiore di 19 (37 oppure 21).

Il lato maggiore misura **7** hm, **13** hm, **14** hm, **19** hm.

17 – Un nuovo triangolo

Chiamiamo x-1, x, x+1 i tre lati. Dalla formula di Erone si ha:

$$\sqrt{\frac{3x}{2}\left(\frac{3x}{2}-x\right)\left(\frac{3x}{2}-x-1\right)\left(\frac{3x}{2}-x+1\right)}=\frac{2}{5}x(x+1)$$

$$\frac{3x}{2}\frac{x}{2}\left(\frac{x}{2}-1\right)\left(\frac{x}{2}+1\right)=\frac{4}{25}x^2(x+1)^2$$

Dividendo per x^2 e semplificando si arriva infine a

$11x^2-128x-364=0$ la cui soluzione positiva è 14.

I lati misurano 13 cm, 14 cm, 15 cm.

L’area misura (2/5)×14×15 = **84** cm^2.

18 – L’inquinamento

Sostanzialmente, il primo cubetto inquinato può trovarsi in 6 diverse posizioni, supponiamo al “primo piano”.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8
5	6	7	8	9

Per esempio, nel caso 1-1-1

avremo 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1 nuovi cubetti inquinati ogni giorno.

Ai piani successivi avremo gli stessi numeri, ma con un giorno di ritardo per ogni piano.

18 – L'inquinamento

Quindi, per calcolare come progredisce l'inquinamento, basterà usare uno schema come questo:

1	2	3	4	5	4	3	2	1				
	1	2	3	4	5	4	3	2	1			
		1	2	3	4	5	4	3	2	1		
			1	2	3	4	5	4	3	2	1	
				1	2	3	4	5	4	3	2	1
1	**4**	**10**	**20**	**35**	**53**	**72**	**90**	**105**	**115**	**121**	**124**	**125**

e vedere se in qualche giorno abbiamo il 52% di 125 cubetti grigi, cioè 65: in questo caso, no.

18 – L'inquinamento

Nel caso 1-1-2 abbiamo

e quindi abbiamo

Al 6° giorno abbiamo 65 cubetti inquinati, occorrono 12 giorni.

2	1	2	3	4
3	2	3	4	5
4	3	4	5	6
5	4	5	6	7
6	5	6	7	8

1	3	4	5	5	4	2	1				
	1	3	4	5	5	4	2	1			
		1	3	4	5	5	4	2	1		
			1	3	4	5	5	4	2	1	
				1	3	4	5	5	4	2	1
1	**5**	**13**	**26**	**44**	**65**	**85**	**102**	**114**	**121**	**124**	**125**

18 – L’inquinamento

3	2	1	2	3
4	3	2	3	4
5	4	3	4	5
6	5	4	5	6
7	6	5	6	7

Nel caso 1-1-3 abbiamo

e quindi abbiamo

In questo caso non abbiamo mai 65 cubetti inquinati.

1	3	5	5	5	4	2				
	1	3	5	5	5	4	2			
		1	3	5	5	5	4	2		
			1	3	5	5	5	4	2	
				1	3	5	5	5	4	2
1	**5**	**14**	**28**	**47**	**69**	**90**	**106**	**117**	**123**	**125**

18 – L’inquinamento

Nel caso 1-2-2 abbiamo

e quindi abbiamo

In questo caso non abbiamo mai 65 cubetti inquinati.

3	2	3	4	5
2	1	2	3	4
3	2	3	4	5
4	3	4	5	6
5	4	5	6	7

1	4	6	6	5	2	1				
	1	4	6	6	5	2	1			
		1	4	6	6	5	2	1		
			1	4	6	6	5	2	1	
				1	4	6	6	5	2	1
1	**6**	**17**	**34**	**56**	**79**	**99**	**113**	**121**	**124**	**125**

18 – L’inquinamento

Nel caso 1-2-3 abbiamo

e quindi abbiamo

In questo caso non abbiamo mai
65 cubetti inquinati.

4	3	2	3	4
3	2	1	2	3
4	3	2	3	4
5	4	3	4	5
6	5	4	5	6

1	4	7	7	4	2				
	1	4	7	7	4	2			
		1	4	7	7	4	2		
			1	4	7	7	4	2	
				1	4	7	7	4	2
1	**6**	**18**	**37**	**60**	**84**	**104**	**117**	**123**	**125**

18 – L'inquinamento

Nel caso 1-3-3 abbiamo

5	4	3	4	5
4	3	2	3	4
3	2	1	2	3
4	3	2	3	4
5	4	3	4	5

e quindi abbiamo

1	4	8	8	4				
	1	4	8	8	4			
		1	4	8	8	4		
			1	4	8	8	4	
				1	4	8	8	4
1	**6**	**19**	**40**	**65**	**89**	**109**	**121**	**125**

Al 5° giorno abbiamo 65 cubetti inquinati, occorrono 9 giorni.

Occorrono **9** giorni oppure **12** giorni.