FINALE INTERNAZIONALE PARIGI 27 AGOSTO 2004 (1° giornata)

3. LA PITTURA

La quantità di pittura gialla che utilizza Massimo è quattro volte la quantità che ha utilizzato per la prova. Anche le altre quantità saranno quattro volte quelle della prova.
Pittura rossa: 4 x ¼ = **1** litro; pittura bianca: 4 x 1 = **4** litri.

4. PASSA A 6

Ognuno dei sei scolari può passare la palla ai suoi cinque compagni. Il numero massimo di passaggi è **30**.

5. LE CASELLE NERE

Nella colonna di destra e nella riga sotto sono riportate le somme che, come si vede, sono tutte minori di 13

3	**1**	**5**	**2**	6
5	**0**	**1**	**6**	12
4	**6**	**2**	**3**	11
1	**4**	**7**	**8**	12
9	11	10	11	

6. FIBONACCI ALLA SCUOLA COMUNALE

La successione di Fibonacci è la seguente: 1,1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765,... Ogni numero è la somma dei due numeri che lo precedono. I
l numero pronunciato dal ventesimo scolaro è 6765?

7. **IL RAGGIO LASER**

Inserire foto

8. LA SOTTRAZIONE

condizione: ♥ > ♦

♣ ♦ -

♥ ♣ =

\-\-\-\-\-\-\-\-\-

♦ ♣

Il problema potrebbe essere risolto con dei tentativi ma non è il metodo migliore.

Dalla colonna di destra ricaviamo che il simbolo ♦ rappresenta un numero pari (e diverso da zero).
Combinando l'osservazione con la colonna di sinistra e con la condizione di partenza si deduce:

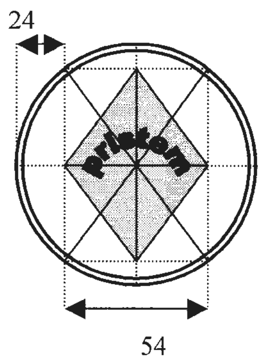
♣ > ♥ > ♦.

Dando al simbolo ♦ il valore di 2, il simbolo ♣ può assumere solo il valore di 6 e, conseguentemente al simbolo ♥ si attribuisce il valore di 3.
La sottrazione 62 – 36 = 26 è soluzione.

Dando al simbolo ◆ il valore di 4 (6; 8), il simbolo ♣ può assumere solo il valore di 7 (8; 4) e, conseguentemente al simbolo ♥ si attribuisce il valore di 2 (1; 1)
Le sottrazioni 74 – 27 = 47 (86-18=68; 48-19=29) non sono soluzioni per la condizione posta.

9. IL PIATTO DEL PRISTEM

Dalla figura si stabilisce che il lato della losanga (rombo) è uguale al raggio del cerchio.
La misura del raggio è: 24+54:2=51 cm.
Il perimetro della losanga centrale del piatto Pristem è 204 cm

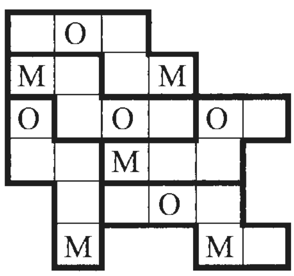


10. LA GALLINA CONTABILE

Per facilitare la soluzione del problema immaginiamo che le uova che depone siano rosse.
Dopo avere contato le prime 2004 uova avrà deposto 2004:4=501 uova rosse.
Comincia poi a contare le uova rosse e immaginiamo che ora deponga delle uova verdi.
Dopo aver contato 500 uova rosse avrà deposto 500:4=125 uova verdi, e avrà da contare ancora 125+1=126 uova, cominciando a deporre uova blu. Dopo 124 uova avrà deposto 124:4=31 uova blu e le rimarranno 31+2=33 uova ancora da contare. Per contare queste uova deporrà 32:4=8 uova gialle e le avanzeranno 8+1=9 uova da contare; per contarle deporrà 8:4=2 uova arancioni.
A questo punto le rimarranno da contare solo 2+1=3 uova.
Complessivamente avrà contato:
2004 (iniziali) + 501 (rosse) + 125 (verdi) + 31 (blu) + 8 (gialle) + 2 (arancioni) = **2671** uova

11. I MANDORLI E GLI ULIVI

La figura riproduce la ripartizione fatta dal vecchio Giuseppe.



12. DICIOTTESIMO COMPLEANNO

Il più piccolo valore possibile per « DIXHUIT » è 2 045 709

1) Da DIX + HUIT + 1111 x ZERO = DIXHUIT risulta :
DIXHUIT – HUIT = DIX + 1111 x ZERO
DIX0000 = DIX + 1111 x ZERO da cui
DIX0000 – DIX = 1111 x ZERO
DIX (10000-1) = 1111 x ZERO
9999 DIX = 1111 x ZERO
9 DIX = ZERO
Z+E+R+O è multiplo di 9 maggiore di 10 (quattro cifre diverse) e minore di 20 (dalla colonna *d* della tabella sottostante)

2) Esaminiamo ulteriormente la tabella:

g	*f*	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*	
				D	**I**	**X**	+
			H	**U**	**I**	**T**	+
			Z	**E**	**R**	**O**	+
		Z	**E**	**R**	**O**		+
	Z	**E**	**R**	**O**			+
Z	**E**	**R**	**O**				=
D	**I**	**X**	**H**	**U**	**I**	**T**	

La colonna *a* dice: X+O=10;
dalla colonna *b*: 2I+R+O-1(il riporto dalla colonna *a*)=I+10 da cui I+R+O=9 e R+O≥9;
dalla colonna *g*: D=Z+1;
dalla colonna *f*: Z+E≥9 e combinando le osservazioni delle colonne *b* ed *f* si ricava: R+O=9 Z+E=9 e I=0 (zero);
ci sono sufficienti informazioni per cominciare ad attribuire alcuni valori alle lettere, partendo dalla R e dalla Z, dopo pochissimi tentativi si arriva alla soluzione: Z=1, D=2, R=3, X=4, O=6, U=7, E=8 e H=9.

13. IMPRUDENZA

Il moltiplicando è un numero pari, le prime due cifre del prodotto sono sicuramente pari, quindi possono essere solo 88. Nel moltiplicando lo 0 occupa una delle due cifre centrali il 6 non è la cifra di destra. Restano due sole alternative per la cifra di destra: 2 o 4. Provando con 2, la cifra delle unità del moltiplicatore risulta essere 4 e, indicando con A e B due delle cifre a disposizione, risulterebbe: --02 x --A4 = ------88 (impossibile) oppure –0B2 x --A4 = ------88 da cui 2A+4B=8 o 28 o 18 (A+2B=4 o 14 o 9) impossibili i primi due perché A è dispari, possibile se B=4 e A=1

				-	***0***	***B***	***2***
				-		A	4
						4B+2A	8
						8	8

Non resta che provare con il 4 e il 7 come cifra delle unità del moltiplicando e del moltiplicatore.
La moltiplicazione del giovane Malik è: 6042 x 5147 = 31931988

possibile se B=4 e A=1 proviamo inserendo anche la nuova cifra C

				-	*0*	*4*	*2*
				-	**C**	**1**	**4**
					1	6	8
				0	4	2	
					2C		
					2C+5	**8**	**8**

Ora con C=5 impossibile perché 2C+5 finirebbe per 5, con C=7 possibile, e l divisione completa diventa

				6	*0*	*4*	*2*
				5	**7**	**1**	**4**
			2	4	1	6	8
			6	0	4	2	
	4	2	2	9	4		
3	0	2	1	0			
3	**4**	**5**	**1**	**3**	**9**	**8**	**8**

Che non è soluzione perché contiene anche le cifre 4 e 5.

Non resta che provare con il 4 e il 7 come cifra delle unità del moltiplicando e del moltiplicatore.

				-	-	*B*	*4*
				-	-	**A**	7
						7B+2	8
						4A	
						8	**8**

Con B=0 diventa A=4 accettabili

				F	*D*	*0*	*4*
				G	**E**	**4**	**7**
					7D	2	8
				4D	1	6	
				0	4E		
						8	**8**

Con D=6 e F=2 risulta:

				2	*6*	*0*	*4*
				G	**E**	**4**	**7**
			1	8	2	2	8
		1	0	4	1	6	
		2E	6E	0	4E		
	2G	6G	0	4G			
-	-	-	-	-	-	**8**	**8**

Per i riporti potrebbe essere G=5, ed E=1 ma la moltiplicazione che risulta non è soluzione.

				2	***6***	***0***	***4***
				5	**1**	**4**	7
			1	8	2	2	8
		1	0	4	1	6	
		2	6	0	4		
1	0	0	2	0			
1	**0**	**4**	**0**	**2**	7	**8**	**8**

Non resta che provare ad invertire il 2 con il 6 nel moltiplicando che si ottiene:

				6	***2***	***0***	***4***
				5	**1**	**4**	7
			4	3	4	2	8
		2	4	8	1	6	
		6	2	0	4		
3	1	0	2	0			
3	**1**	**9**	**3**	**1**	9	**8**	**8**

La moltiplicazione del giovane Malik è: 6042 x 5147 = 31931988

Problema 15 giorno 2 – I nonni

Soluzione: le due soluzioni accettabili sono 17 e 18.

Dobbiamo studiare questo problema: dati n bambini, come possiamo "disporre" i loro nonni in modo che sia minimo il massimo numero di nipoti per nonno?

Facciamo un paio di considerazioni preliminari: fissiamo un bambino, e siano A e B i suoi nonni. Ora, poiché ogni altro bambino deve avere un nonno in comune con lui, possiamo suddividere i bambini in tre gruppi:

- bambini i cui nonni sono A e B (AB)
- bambini i cui nonni sono A e un altro diverso da B ($A?$)
- bambini i cui nonni sono B e un altro diverso da A ($B?$)

Ora, abbiamo due casi:

1. Uno degli insiemi $A?$ e $B?$ è vuoto: in tal caso tutti i bambini esistenti condividono un nonno (A oppure B). È evidente però che questa non è la configurazione ottimale, come vedremo dopo.

2. Entrambi gli insiemi sono non vuoti: allora, prendiamo un bambino di $A?$ e uno di $B?$. Perché essi abbiano un nonno in comune, è necessario che sia quello genericamente indicato con ?, cioè possiamo indicare i bambini con AC e BC. Ora, poiché possiamo far variare indipendentemente i due bambini all'interno dei due insiemi, ne segue che *tutti* i bambini di $A?$ e di $B?$ avranno C come secondo nonno. Quindi ci sono solo tre nonni, e i bambini si suddividono nei tre insiemi AB, AC e BC. In quest'ultimo caso è evidente che la suddivisione migliore per il problema che stiamo studiando è quella in cui i nipoti sono distribuiti il più possibile uniformemente tra i tre insiemi.

Quindi, se abbiamo 16 (o meno) bambini possiamo disporli nella configurazione con tre nonni in questo modo:

nonni	n. di bambini
AB	6
BC	5
AC	5

,

per cui non è detto che ogni nonno abbia almeno 12 nipoti. Se abbiamo 17 o 18 bambini, invece, esiste sicuramente almeno un nonno con 12 nipoti, perché:

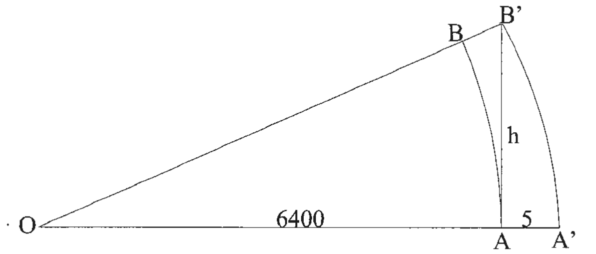
- Se siamo nella prima configurazione (tutti i bambini hanno un nonno in comune) è evidente

- Se siamo nella seconda, per il principio del *pigeonhole* uno dei tre insiemi avrà 5 o meno bambini (6 nel caso di 18 bambini totali) e quindi il nonno in comune agli altri due insiemi dovrà avere almeno 12 ($17-5$, o $18-6$ bambini).

Tuttavia, se i bambini sono divisi come $6-6-5$ e $6-6-6$ tra i tre insiemi del secondo caso, nessun nonno ha almeno 13 nipoti.

Se invece ci sono più di 18 bambini, un ragionamento basato sul *pigeonhole* analogo a quello già fatto mostra che anche nel secondo caso esiste un nonno con almeno 13 nipoti.

Problema 18 giorno 1 – Falsa speranza



Calcoliamo in primo luogo la distanza che percorrerebbe l'aereo se la sua traiettoria, invece di essere "vista" sotto un angolo di 120°, fosse perfettamente verticale sullo zenit del naufrago.

Per questo ci può aiutare la figura qui sopra, in cui la Terra è vista in sezione e il naufrago è in A. Detto α l'angolo al centro $\widehat{AOB}$, r il raggio della Terra e $a = 5$ km l'altezza dell'aereo, si ha

$$h = OA' \sin\alpha = (r + a)\sin\alpha$$

e

$$OA = OA' \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{r+a}{r}$$

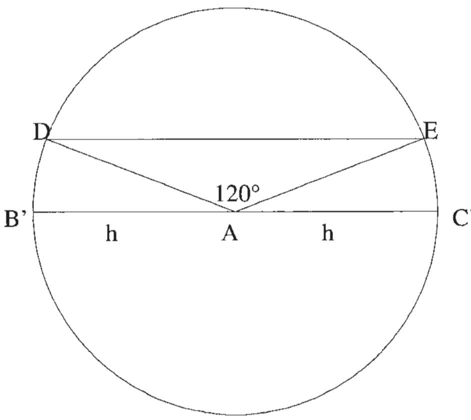
Ricaviamo quindi $\sin\alpha$ e poi h:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{r^2}{(r+a)^2}}$$

$$h = (r+a)\sin\alpha = (r+a)\sqrt{1-\frac{r^2}{(r+a)^2}} = \sqrt{(r+a)^2 - r^2}$$

Numericamente (tutte le lunghezze in km) otteniamo $h = \sqrt{64025} \simeq 80\sqrt{10}$.

Ora guardiamo la stessa scena secondo una vista dall'alto:



Sappiamo la lunghezza del diametro $B'C'$ (è il valore h che abbiamo calcolato in precedenza) e siamo interessati alla lunghezza dell'arco DE (la traiettoria dell'aereo, che il naufrago in A vede sotto un angolo di 120°). La corda DE ad esso sottesa è lunga $2h \sin 60° = h\sqrt{3}$ km. Poiché siamo su angoli molto piccoli ($5 \ll 6400$) e l'approssimazione richiesta sul risultato è scarsa, possiamo approssimare la lunghezza dell'arco con quella della corda, quindi $h\sqrt{3} = 80\sqrt{30}$

L'aereo percorre allora una distanza pari a $80\sqrt{30}$ km in $\frac{1}{4}$ di ora: la sua velocità vale quindi $\frac{80\sqrt{30}}{\frac{1}{4}} \simeq 1752,7$ km/h, che approssimiamo come richiesto dal problema a 1750 km/h.