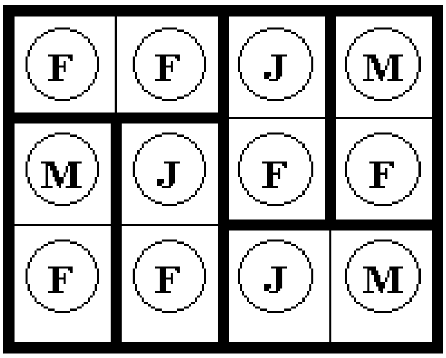
FINALE ITALIANA 1998 SOLUZIONI

16 maggio 1998 - Università Bocconi

1. UN PROBLEMA TURCO
Conviene mettere le cifre maggiori quali fattori e togliere il numero più piccolo. Il massimo valore ottenibile è:
9 x 9 - 1 + 8 = 88

2. I DOMINO DELLA FFJM
Tenendo conto della disposizione delle tessere già assegnate e della regola per le righe, si ottiene la seguente unica soluzione :



3. I CUBETTI DELLA FFJM
50 cubetti hanno in totale 50 X 6 = 300 facce. Ciascuno dei 48 trattini unisce fra loro due facce; in totale non dovranno essere verniciate 48 X 2 = 96 facce. Le facce da verniciare saranno allora 300 - 96 = 204

4. LA STRISCIA DI CARTA
La striscia di carta si può pensare formata da 3 rettangoli di dimensione 11 X 1 cm e da un ultimo rettangolo di dimensione 12 X 1 cm. La lunghezza totale della striscia è allora di 45 cm.

5. L´ALBERO DELLA FFJM
Osserviamo la seguente tabella:

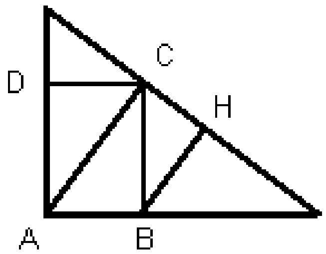
anno	1	2	3	4	5
rami totali	1	3	7	15	31

Possiamo allora affermare che il numero dei rami sarà dato da 212 - 1 = 4095

6. IL TESORO DEL FARAONE
Seguendo le regole assegnate, notiamo una periodicità dopo 10 passi (partendo dalla prima A di PHARAON). Infatti le lettere si susseguono nell´ordine: A, P, O, R, T, S, D, H, A, A. Dunque, poiché 1998 = 199 X 10 + 8 e l´ottava lettera della sequenza è la lettera D, questa sarà quella da premere per aprire la porta

7. MOLTIPLICAZIONE DI DOMINO
66 x 65 = 4590 non è accettabile poiché contiene la cifra 9 (non presente nel domino), mentre 65 x 64 = 4160 è accettabile. I due domino sono quindi 65 e 64.

8. DIVISIONE DI TRIANGOLI
Lavorando "al risparmio", lascio stare (ad esempio) il primo triangolo e divido gli altri due. Sempre per ottenere triangoli tutti diversi tra di loro, divido ancora i due triangoli piccoli del secondo triangolo



Quattro tagli non sono sufficienti perché i triangoli ABC e ACD risultano uguali. Necessitano quindi 5 tagli

9. NUMERO DI DUE CIFRE
L´incognita è N = 10x + y, con x e y interi compresi tra 0 e 9. La condizione data è Nxy = 336, cioè 10x2y+x2y=336. Considerando tutte le diverse possibilità, l´unica soluzione è 42

10. SOMMA DI POTENZE
Notato che 56>65, 34>43 e 2>1, la massima somma possibile sarà

$$2^1 + 3^4 + 5^6 = 15708$$

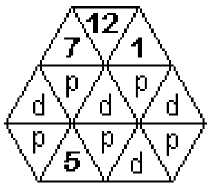
11. TUTTE LE PAGINE LETTE
Se il numero delle pagine lete fosse di due cifre, chiamando D la cifra delle decine della pagina che sta per leggere e U la cifra delle unità, poiché D + U + D + U + 1 = 31, allora 2D + 2U = 30, da cui D + U = 15. I numeri delle pagine possibili saranno allora solo 78 e 79 oppure 96 e 97.
Se invece pensassimo che il numero delle pagine lette fosse di tre cifre, si avrebbe 1 + D + U + 1 + D + U + 1 = 31 (il libro ha meno di 200 pagine, quindi la cifra delle centinaia è certamente 1), da cui 2D + 2U + 3 = 31 e D + U = 14. I numeri delle pagine possibili sono allora 186 e 187 oppure 168 e 169.
Allo stesso modo troviamo i numeri di pagina dopo la seconda lettura: cun due cifre otteniamo 2D + 2U + 1 = 19 e i numeri di pagina possibili sono 54 e 55 (non accettabile, inferiore ai numeri di pagina della prima lettura), 72 e 73 (non accettabile per lo stesso motivo) e 90 e 91. Pensando alle pagine con la cifra delle centinaia otteniamo 2D + 2U + 3 = 19, da cui D + U = 8. Le risposte possibili sono 108 e 109; 126 e 127; 144 e 145; 162 e 163; 180 e 181.
Considerando allora le differenze possibili, ricordando che le prime due pagine

devono essere lette ancora da Adalberto Maria, si trovano 6 soluzioni : 14 pagine, 32 pagine, 50 pagine, 68 pagine, 86 pagine o 104 pagine.

12. SPESE PER L´INIZIO DELLA SCUOLA
Detti A, B, C, D, E gli acquisti effettuati nell´ordine (A=quaderno, B=temperamatite, C=compasso, D=goniometro, E=classificatore), i dati del problema forniscono:
A x B = 36000
B x C = 54000
C x D = 72000
D x E = 108000
E x A = 144000
È facile verificare che il sistema delle cinque equazioni ha un´unica soluzione per cui il valore di B è 4500 lire

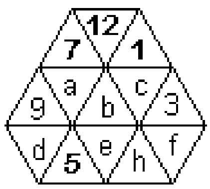
13. IL CAMPO TRAPEZOIDALE
Si consideri il lato obliquo lungo m 50. Considerando il teorema di Pitagora e il fatto che le misure dei lati devono essere espresse da numeri interi (di metri), si ha che l´altezza del trapezio misura m 40, mentre la proiezione del lato obliquo sul prolungamento della base maggiore misura m 30.
Prendendo ora in esame l´altro lato obliquo e la sua proiezione sulla base maggiore (uguale a m 96) si conclude che la base minore è lunga 4 metri.

14. I 13 NUMERI
Notiamo subito che i numeri pari (che sono 6) devono essere separati da numeri dispari, che sono 7. Ne risulta che la posizione dei numeri pari e dei numeri dispari è completamente determinata

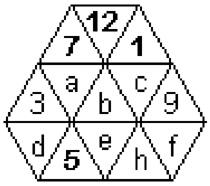


Notiamo adesso che i numeri 3 e 9 non possono essere posizionati in due caselle confinanti con un lato. In effetti, nessun numero pari potrà essere posizionato in una casella confinante simultaneamente con 9 e 3 (infatti, 2 e 4 non possono stare vicino al 3; 8 e 10 non possono stare vicino a 9 e 6 e 12 hanno in comune il divisore 3). Ne risulta che nè 3 nè 9 possono occupare la casella centrale. Sono allora possibili quattro disposizioni per i numeri 3 e 9.

A

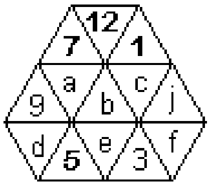


B

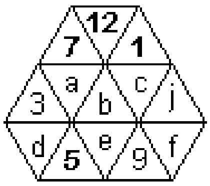


Nelle figure A e B possiamo collocare il numero 6 solo nella posizione "e", che non è accettabile per la prima regola. Le due disposizioni sono quindi impossibili.

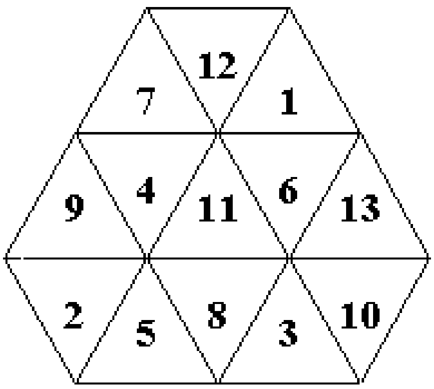
C

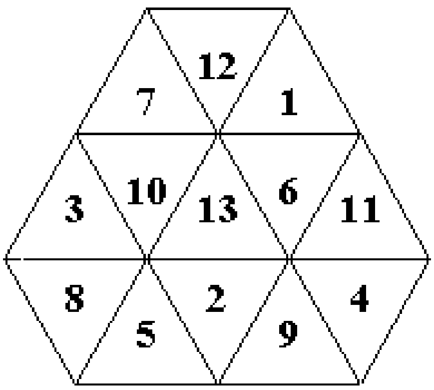


D



Studiando la figura C otteniamo: 6 in c, 10 in f, 4 in a, 2 in d, 8 in e, 11 in b, 13 in j.
Allo stesso modo per la figura D: 6 in c, 10 in a, 4 in f, 8 in d, 2 in e, 13 in b e 11 in j.
Le soluzioni sono due:





15. IL MAGO ATTI
Sia X il numero compreso tra 1 e 2000 scelto dallo spettatore. Si ha allora:
X = R1 mod 3
X = R2 mod 23
X = R3 mod 29
Possiamo iniziare a trovare le soluzioni delle tre condizioni:

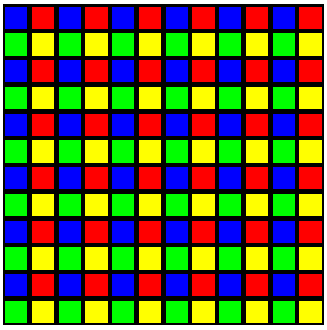
1. X = 1 mod 3 e X = 0 mod 23 x 29
23 x 29 = 667 e 667 = 1 mod 3, quindi 667 è una soluzione del primo sistema

2. X = 1 mod 23 e X = 0 mod 3 x 29
3 x 29 = 87 e 87 = 18 mod 23, mentre 9 x 87 = 783 = 1 mod 23 quindi 783 è una soluzione del secondo sistema

3. X = 1 mod 29 e X = 0 mod 3 x 23
3 x 23 = 69 e 69 = 11 mod 29, da cui 8 x 69 = 552 = 1 mod 29 quindi 552 è una soluzione del secondo sistema

Il mago Atti ha dunque fatto il calcolo seguente:
667r1 + 783r2 + 552r3, dividendo poi la somma per 2001 (= 3 x 23 x 29)
Con altre soluzioni si perviene alla soluzione finale:
667 o 2668, 783 o 2784, 552 o 2553 e 2001

16. RAREFAZIONE DI PEDINE
Coloriamo il piano quadrettato con quattro colori, come nel disegno seguente:



Quando le 61 pedine sono state messe sulla quadrettatura, in virtù del "principio dei cassetti", esiste almeno un colore sul quale sono posizionate 16 pedine (61 = 3 x 15 + 16). Può allora essere necessario togliere fino a 45 (= 61 - 16) pedine in modo che due pedine restanti non siano mai su due caselle in contatto né per un lato né per un vertice.